数理解析研究所講究録
628巻 1987年 9-22

Derived Category と Stable Equivalence

上武大学経営情報学部　若松隆義
(Takayoshi Wakamatsu)

体k上の多元環Aが与えられたとき，有限生成右A-加群全体の成すcategoryをmod-Aで表す．　同様に有限生成左A-加群のcategoryはA-modと記す．　k-dualを取る操作で，この2つのcategoryの間にfunctorが定義されるが，これをDで表す．　DAはこれ等のcategoryの中で，最小のinjective cogeneratorとなり，$D \cong \mathrm{Hom}_A(?, DA)$が成立する．

A-加群T_Aが，次の3つの条件を満足するとき，これを<u>tilting module</u>と呼ぶ．

(i)　$\mathrm{proj.dim}\, T_A \leq 1$

(ii)　$\mathrm{Ext}^1_A(T_A, T_A) = 0$

(iii)　$0 \to A_A \to T_0 \to T_1 \to 0$, $T_i \in \mathrm{add}\, T_A$

なるshort exact sequenceが存在する．

tilting module T_A に対して，$B=\mathrm{End}(T_A)$ とおき，自然に左B-加群 ${}_BT$ を考えると，これが再びtilting moduleとなり，$\mathrm{End}({}_BT)=A$ となることが知られている．

多元環Aに対して，それのDAによる自明拡大多元環 $T(A)=A\ltimes DA$（加群としては $T(A)=A\oplus DA$ であって，積が $(a_1, q_1)(a_2, q_2)=(a_1a_2,\ a_1q_2+q_1a_2)$ で定義されるもの）を考えると，これは対称多元環，従って，QF-多元環となる．

category mod-T（A）の中で，projective= injective加群を通過するような写像の全体は両側ideal となり，このideal による剰余category $\underline{\mathrm{mod}}$-T（A）が定義される．
mod-Aは，この中にfullに埋めこまれるから，Aの表現論を展開する場合，$\underline{\mathrm{mod}}$-T（A）を利用することは自然な発想である．

tilting module ${}_BT_A$ があるとき，これを用いて，上で定義された剰余categories $\underline{\mathrm{mod}}$-T（A），$\underline{\mathrm{mod}}$-T（B）の間にcategory equivalence $\mathcal{S}_T$: mod-T（A）$\xrightarrow{\sim}$ mod-T（B）が定められる．　従って，mod-A，mod-Bの変化の様子を，これ等に共通の拡大されたcategoryの中で調べることができる訳である．

しかし，一方，tilting moduleの条件の1つである射影次元≦1はあまりに強過ぎて，この理論の応用範囲が限られてしまう．　従って，射影次元に関する条件を除いた所で，同様の理論が展開できないものであろうか？という問題が生じてくる．

そこで，tilting moduleの持っている性質

(i)　${}_BT_A$: faithfully balanced　$(B = \mathrm{End}(T_A),$

$\mathrm{End}({}_BT) = A)$，

(ii)　$\mathrm{Ext}^i_B({}_BT, {}_BT) = 0 = \mathrm{Ext}^i_A(T_A, T_A)$　for $\forall i \geqq 1$.

に注目して，この2条件を満足する加群を，一般化された tilting moduleと呼ぶことにする．　このように一般化しておけば，tilting moduleは，次に述べる一般化された中山予想とも関係を持ってくる．

一般化された中山予想とは，多元環Aに対して，A_A の injective resolution　$0 \to A_A \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots$

を考えるとき，すべての直既約な injective A-加群は，必ずあるk に対して，I_k の直和因子として現れるであろうというものである．

T_A として，ある I_k の直和因子に出てくる直既約な

injective A-加群全体の直和をとれば，$B = \mathrm{End}(T_A)$として，$_BT_A$が一般化されたtilting moduleとなることが証明されるから，上の予想は，$K_0(A) \cong K_0(B)$が成立するか？という問題と考えられる．実際，T_Aの直和因子にすべての直既約なinjective A-加群が現れるということは，Bの非同型なidempotent primitiveな元の個数が，Aのそれと一致するということに同値だからである．

従って，次の問題は，一般化された中山予想の，更なる一般化として自然に考えられるものである．

<u>問題</u>：　一般化されたtilting module $_BT_A$に対して，

$K_0(B) \cong K_0(A)$は成り立つか？

これは，$_BT_A$が普通の意味でのtilting moduleである場合には，Happel-Ringelによって証明されている．　これと関連して，<u>Auslanderの問題</u>：QF多元環A，Bに対して同値 <u>mod</u>-A $\cong$ <u>mod</u>-Bがあるとき，$K_0(A) \cong K_0(B)$はどんな場合に成立するか？というものも関係してくることを述べておきたい．　次の問題を考える．

<u>問題</u>：　一般化されたtilting module ${}_B T_A$ に対して，

同値 $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}\hat{A} \cong \underline{\mathrm{mod}}\text{-}\hat{B}$，　$\underline{\mathrm{mod}}\text{-}T(A) \cong \underline{\mathrm{mod}}\text{-}T(B)$ は

一般に成り立つか？

ここで，$\hat{A}$ は，Hughes-Waschbüschによって導入されたAのrepetetive algebraを表す．　即ち，次の無限次元の多元環である．

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & 0 \\ & A & DA & & & \\ & & A & DA & & \\ & & & A & DA & \\ 0 & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

２番目に述べた問題も，${}_B T_A$ が普通の意味のtilting module に対しては肯定的である．　一般にこれが肯定的であって，更に，Auslanderの問題が，$T(A)$，$\hat{A}$ 等の場合に肯定的であれば，初めの問題も肯定的となる．　逆に２つの問題の方からAuslanderの問題を考えることも可能であろう．

現在の所，上の２つの問題は，$\mathrm{pd}\,{}_B T$，$\mathrm{pd}\,T_A < \infty$ という制限のもとで肯定的に証明されているが，その証明をここ

で解説し，Derived Categoryとの関連についても述べておきたい．

${}_BT_A$ が普通の意味のtilting moduleである場合には，任意の有限生成A-加群 X_A に対して，

$$0 \to X_A \to V(X) \to T(X) \to 0$$

というshort exact sequenceで $V(X)_A \in \mathrm{add}T_A$ ，$T(X)_A \in \mathrm{KerExt}^1_A(T_A, ?)$というものが一意的に存在し，これを用いて同値 $\mathcal{S}$: $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}T(A) \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}T(B)$, $\underline{\mathrm{mod}}\text{-}\hat{A} \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}\hat{B}$ が定義された（太刀川-若松 ［８］参照）． 一般化されたtilting moduleで，pd_BT，$\mathrm{pd}T_A < \infty$という条件を満足するものについても，同様のsequenceを構成し，それを用いて，全く同様にfunctorを定義する． 普通のtilting moduleの場合には，Brenner-Butlerの定理によって，$\mathrm{KerExt}^1_A(T_A, ?) \cong \mathrm{KerExt}^1_A(?, DT_B)$, $\mathrm{KerHom}_A(T_A, ?) \cong \mathrm{KerHom}_A(?, DT_B)$ なる同値の存在することが示されて，これを用いて，$\mathcal{S}$ がwell-definedであることや同値であることが証明されるのだが，一般化されたtilting moduleの場合には，このBrenner-

Butlerの定理の拡張が必要である． ${}_BT_A$ に pd_BT, $\mathrm{pd}T_A$ $<\infty$ なる条件を加えたものは，宮下［5］にあるtilting module with finite projective dimensionと全く同じものであり，$\forall k\geqq 0$に対して，$\bigcap_{\substack{i\geqq 0\\ i\neq k}}\mathrm{KerExt}^i_A(T_A, ?)\cong\bigcap_{\substack{i\geqq 0\\ i\neq k}}\mathrm{KerExt}^i_A(?, DT_B)$ という同値が存在するという形でBrenner-Butlerの定理の拡張が与えられる． ［5］では，多元環ではなく，一般的な環に対して定義されているが，我々の場合には，上で述べたsequenceを利用して，上の同値を，具体的に，ある種の複体の集合の対応として証明することができる．

このsequenceの存在は次のようにして示される． 考えるsequenceは，$0\to X_A\to V(X)\to W(X)\to 0$の形であって，$V(X)_A\in\bigcap_{i\geqq 1}\mathrm{KerExt}^i_A(T_A, ?)$, $0\to W(X)\to T_0\to T_1\to\cdots\to T_n\to 0$ ($T_i\in\mathrm{add}T_A$) となるものである． はじめに，$k=0$の場合に，$\bigcap_{i\geqq 1}\mathrm{KerExt}^i_A(T_A, ?)\cong\bigcap_{i\geqq 1}\mathrm{KerExt}^i_A(?, DT_B)$

を示しておき，$\mathrm{gen}^{\infty}(T_A) = \bigcap_{i\geq 1} \mathrm{KerExt}^i_A(T_A, ?)$となることを証明しておく．仮定$\mathrm{pd}_A T<\infty$を用いると，$\mathrm{Ext}^i_A(T_A, X_A)\neq 0$なる最小の自然数$n_X$が存在するから，この数に関するinductionで存在を示す．$n_X=0$の場合には，$k=0$の場合の同値を用いて，$V(X)=X$，$W(X)=0$とできる．$n_X\geq 1$の場合には，inductionの仮定から，$X\hookrightarrow I$をinjective envelopeとするとき，I/Xに対しては，考えているsequenceは存在する．$V(I/X)$は

$$\bigcap_{i\geq 1} \mathrm{KerExt}^i_A(T_A, ?) = \mathrm{gen}^{\infty}(T_A)$$

に属しているのだから，$\mathrm{add}(T_A)$の加群T_*から$V(I/X)$への全射が存在する．これを用いて次の図式で$V(X)$，$W(X)$が定義できる．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & V(X) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & W(X) \arrow[r, tail] \arrow[d, phantom, "\text{PB}"] & T_* \arrow[r, two heads] \arrow[d] & W(I/X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, tail] & I \arrow[r, two heads] & I/X \arrow[r, tail] & V(I/X) \arrow[r, two heads] & W(I/X)
\end{tikzcd}$$

このとき，$V(X)\in \bigcap_{i\geq 1} \mathrm{KerExt}^i_A(T_A, ?)$が簡単に示されて，

求めるsequenceが得られる訳である．

先にも述べたように，このsequenceは，$\mathcal{S}$が定義されて，同値であることを示すのに必要な性質をすべて持っており，普通のtilting moduleの場合の証明が，そのままの形で今の場合にも適用される． これで２番目の問題が証明される．

初めの問題は，$K_0(A)$から$K_0(B)$への写像として，

$\underline{\dim}\, X_A \mapsto \sum_{i\geq 0} (-1)^i\, \underline{\dim}\, \mathrm{Ext}^i_A({}_BT_A, X_A)_B$ を定義して，

これが同型を与えていることを証明するのであるが，詳しくは［４］又は［９］を参照されたい． この問題では，上の対応を複体の間の対応として理解すると見やすいが，ここでも，上で示したsequenceを利用することができる． しかし，上の対応に出てくる和が，実際には有限和となることが本質的であり，この部分を上手に解釈する方法が求められる． 実際［９］の方法では，$\mathrm{pd}_B T$，$\mathrm{pd}\, T_A < \infty$の条件抜きでも，和の部分が有限和となる場合に，$K_0(A)$，$K_0(B)$の元の間に１対１の対応が定義できることが示される．

Happel［３］は，$\mathrm{gl.dim}\, A < \infty$の場合に，$\underline{\mathrm{mod}}\text{-}\hat{A}$と$D^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$とがtriangulated categoryとして同値になること

を示した. Derived category $D^b(\text{mod-}A)$に対しても,これの triangulation を用いて Grothendieck group $K_0(D^b(\text{mod-}A))$が定義できて,同型 $K_0(D^b(\text{mod-}A)) \cong K_0(\text{mod-}A) \cong K_0(A)$が成立しているから, tilting module ${}_BT_A$ が存在するときに, triangulated category としての同型$D^b(\text{mod-}A) \cong D^b(\text{mod-}B)$の存在が示されれば, $K_0(A) \cong K_0(B)$が示されることになる. しかし,彼の証明では, gl.dim $A < \infty$が本質的であって,この範囲では,先に述べた2つの問題に関しては, derived categoryを導入する必要性はない. 一般のtilting moduleに対して,彼流の方法で向かうためには,まず,$\underline{\text{mod}}\text{-}T(A)$, $\underline{\text{mod}}\text{-}\hat{A}$に対応するderived categoryを求めて,それを$D^*(A)$で表すことにして,次に,$D^*(A) \cong D^*(B)$を示し,更に,$D^*(A)$のGrothendieck groupがmod-Aのそれと同型になることを示すことが必要である. 今の所,この方面で結果は知られていない. しかも, Auslanderの問題との関連を考える場合には, gl.dim $A < \infty$という条件があっても,一般には,$\underline{\text{mod}}\text{-}\hat{A}$

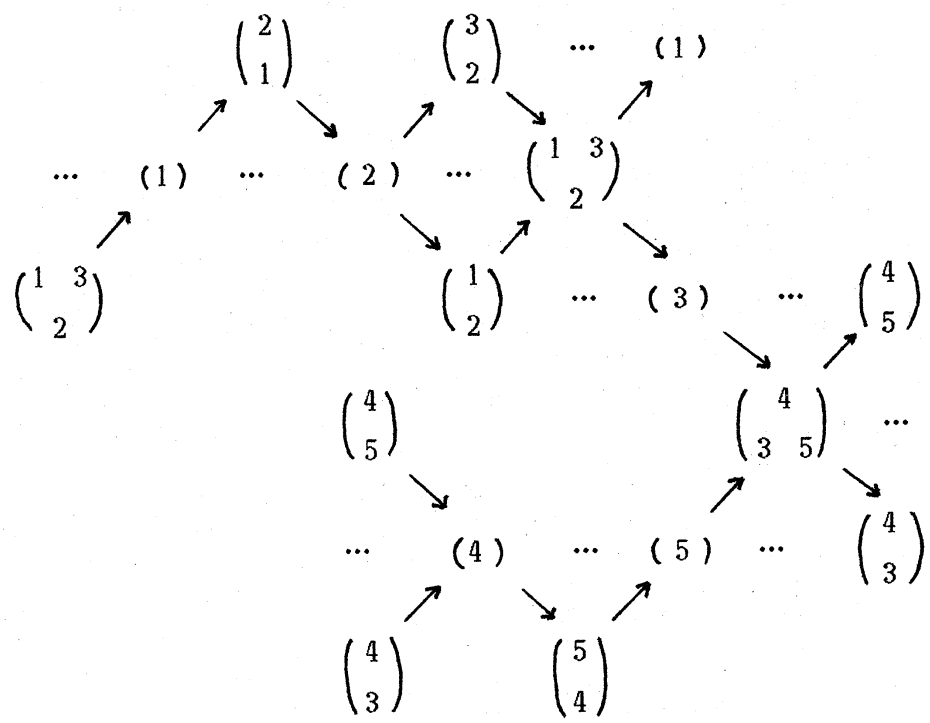
(従って，D^b(mod-A)) だけでは mod-T(A)が充分に表せないから，方法として不満足なものに見える． しかし，K_0(A)とK_0(B)の比較を行う場合には，道具として derived categoryは有効であろう． 適当なD^*(A)を定めることが，とにかく第一歩である．

同値&が与えられるような，一般化されたtilting module ${}_BT_A$で，pd_BT，id_BT，$\mathrm{pd}T_A$，$\mathrm{id}T_A=\infty$のものとして，次のexampleを挙げておく．

多元環 Aのquiver： $1 \rightleftarrows 2 \to 3 \to 4 \rightleftarrows 5$

relation ： $J(A)^2=0$； ここで，J(A)はAのradical.

このとき，Auslander-Reiten quiver Γ_Aは次のようになる．



ここで，$T_A = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}1&&3\\&2&\end{pmatrix}\oplus(3)\oplus\begin{pmatrix}&4&\\3&&5\end{pmatrix}\oplus\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

とおけば求めるexampleとなることがcheckできる．

参考文献

[1] M.Auslander and I.Reiten, On a generalized version of the Nakayama conjecture, Proc.Amer. Math.Soc.52(1975),69-74.

[2] E.Cline, B.Parshall and L.Scott, Derived categories and Morita theory, J.Alg.104(1986), 397-409.

[3] D.Happel, Triangulated categories in representation theory of finite dimensional algebras, Preprint.

[4] D.Happel and C.M.Ringel, Tilted algebras, Trans.Amer.Math.Soc.274(1982),399-443.

[5] Y.Miyashita, Tilting modules with finite projective dimension, Math.Z.193(1986),113-146.

[6] T.Nakayama, On algebras with complete homology, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 22(1958),300-307.

[7] H.Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, LNM 351(1973), Springer.

[8] H.Tachikawa and T.Wakamatsu, Tilting functors and stable equivalences for self-injective algebras, Preprint.

[9] T.Wakamatsu, On modules with trivial self-extensions, Preprint.